Тема лекции и практики:

«ПОСТРОЕНИЕ <u>ПАРНЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ</u> МОДЕЛЕЙ (парных линейных уравнений регрессии)»

ВОПРОСЫ ТЕМЫ:

1.Построение стандартной парной показательной (уравнения регрессии) МНК
2.Построение стандартной обратной парной модели (уравнения регрессии) МНК

Виды математических моделей (стандартных функций)

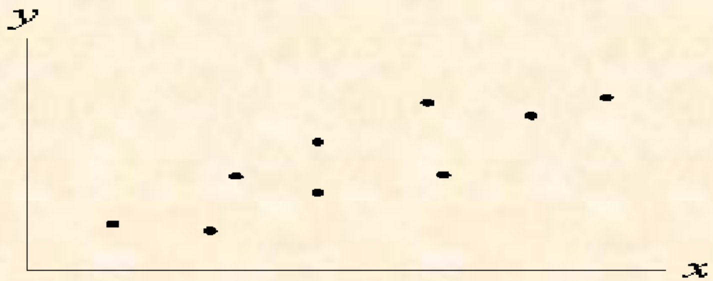
Математическая модель (стандартная функция)

ПАРНАЯ (один фактор) $Y = f(X)$	МНОЖЕСТВЕННАЯ (много факторов) $Y=f(X_1, X_2, X_3, \ldots\ldots, X_n)$
Функция одной переменной	**Функция нескольких переменных**

Вид модели	Парная модель	Множественная модель
линейная	$y= ax+b$	$y= a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n + b$
гиперболическая	$y= a/x+b$	$y= a_1/x_1 + a_2/x_2 + \ldots + a_n/x_n + b$
полином 2 степени	$y= ax^2+bx+c$	$y= a_1x_1^2 + b_1x_1 + a_2x_2^2 + b_2x_2 + c$
полином 3 степени	$y= ax^3+bx^2+cx+d$	$y= a_1x_1^3 + b_1x_1^2 + c_1x_1 + a_2x_2^3+b_2x_2^2+c_2x_2+d$
степенная	$y= ax^b$	$y= ax_1^{b1}x_2^{b2}\ldots x_n^{bn}$
показательная	$y= ab^x$	$y= ab_1^{x1}b_2^{x2}\ldots b_n^{xn}$
обратная	$y= 1/(ax+b)$	$y= 1/(a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n+b)$
экспоненциальная 1	$y = ae^{bx}$	$y = ae^{b1x1}e^{b2x2}\ldots..$
экспоненциальная 2	$y = e^{ax+b}$	$E^{a1x1 + a2x2 + \ldots.. + anxn + b}$
логарифмическая	$y= a\mathrm{Ln}(x)+b$	$y= a_1\mathrm{Ln}(x_1) + a_2\mathrm{Ln}(x_2) + \ldots.. + b$

Этапы построения (поиска) стандартных парных функций

1 Этап: Определяются переменные величины Y и X
2 Этап: Формируется статистическая выборка для переменных X и Y.
3 Этап: Строится поле корреляции (зависимости).

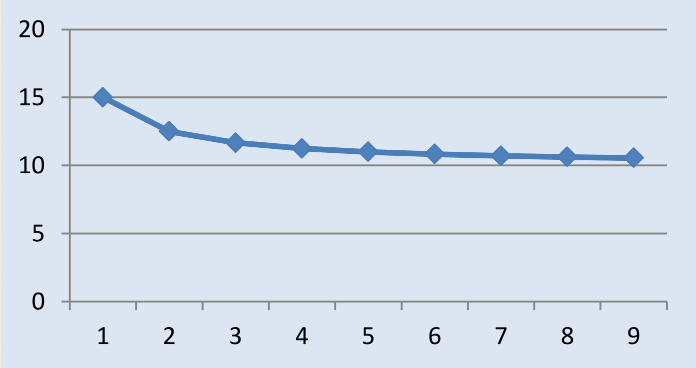


4 Этап: Визуально по характеру распределения точек данных выдвигается гипотеза с помощью какой стандартной парной функции целесообразно аппроксимировать не строгую зависимость (гипотез может быть несколько)!!!!!!!!!
5 Этап: Записывается выбранная функция в общем виде и определяются ее параметры методом наименьших квадратов или методом центральных точек. Если выбранная функция – не стандартная, то метод нахождения ее параметров – это метод итераций.
6 Этап: Рассчитанные параметры записываются в общий вид модели.
7 Этап: Рассчитываются показатели качества модели и делается вывод о возможности ее применения для прогноза Y.

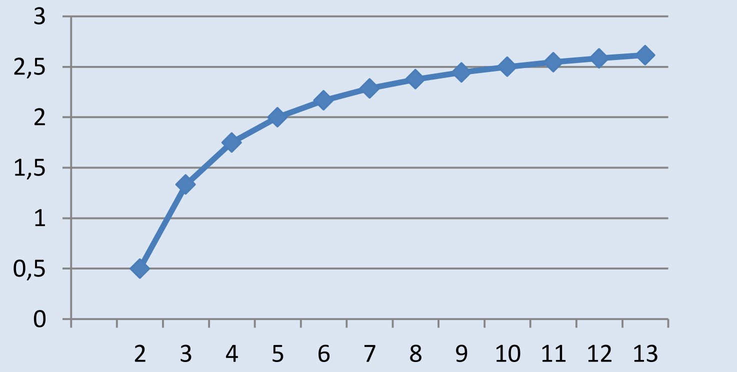
Графическая интерпретация и свойства стандартной гиперболической модели

ГИПЕРБОЛИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ: y = a/x + b

Знак а	Производная	Знак производной в точке	Изменение производной в точке	График модели	Направление зависимости	Степень зависимости Y от X
a > o	$y' = -ax^{-2}$	-	снижается при возрастании X	отрицательный наклон с убывающим углом наклона	обратная	при возрастании X его влияние на Y снижается
a < o	$y' = ax^{-2}$	+	снижается при возрастании X	положительный наклон с убывающим углом наклона	прямая	при возрастании X его влияние на Y снижается



Схематично график модели: y = a/x + b



Схематично график модели: y = - a/x + b

Графическая интерпретация и свойства стандартной степенной модели

СТЕПЕННАЯ МОДЕЛЬ: $y = ax^b$

Знак a	Знак b	Производная	Знак производной в точке	Изменение производной в точке	График модели	Направление зависимости	Степень зависимости Y от X
a > 0	b > 1	$y' = abx^{b-1}$	+	увеличивается при росте X	положительный наклон с ростом угла наклона	прямая	при росте X снижается
a > 0	b > 0	$y' = abx^{b-1}$	+	снижается при росте X	положительный с убыванием угла наклона	прямая	при росте X снижается
a > 0	b < 0	$y' = -bax^{-b-1}$	-	снижается при росте X	отрицательный с убыванием угла наклона	обратная	при росте X снижается

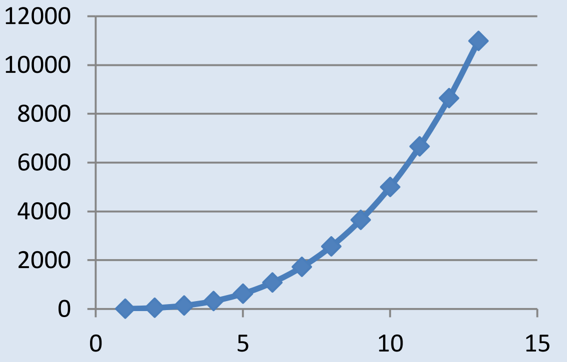


график модели: $y = ax^b$ (b>1)

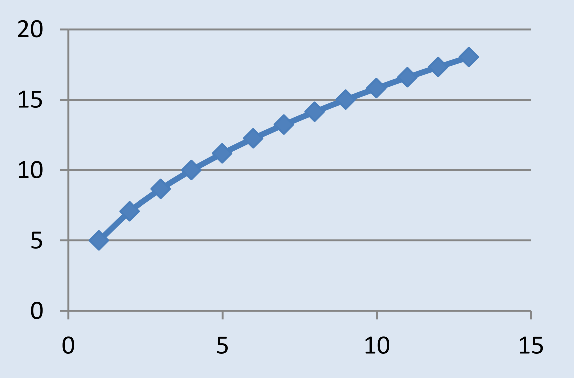


график модели: $y = ax^b$ (b>0)

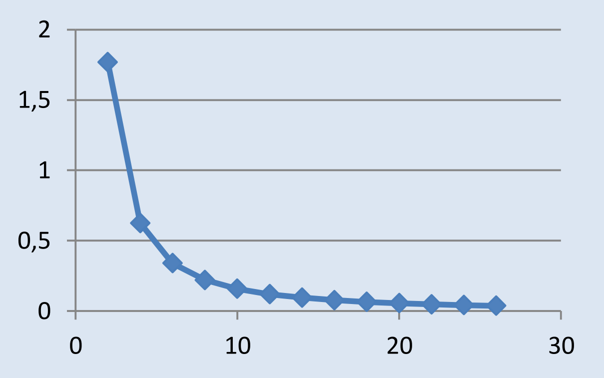


график модели: $y = ax^{-b}$ (b<0)

Графическая интерпретация и свойства стандартной показательной модели

ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ МОДЕЛЬ: $y = ab^x$

Знак a	Знак b	Производная	Знак производной в точке	Изменение производной в точке	График модели	Направление зависимости	Степень зависимости Y от X
a > 0	b > 1	$y' = ab^x \ln(b)$	+	увеличивается при росте X в равное количество раз. Коэффициент роста = b	положительный наклон с ростом угла наклона в b раз	прямая	при росте X увеличивается
a > 0	b > 0	$y' = ab^x \ln(b)$	-	снижается при росте X в равное количество раз. Коэффициент снижения = b	отрицательный наклон с убыванием угла наклона в b раз	обратная	при росте X снижается

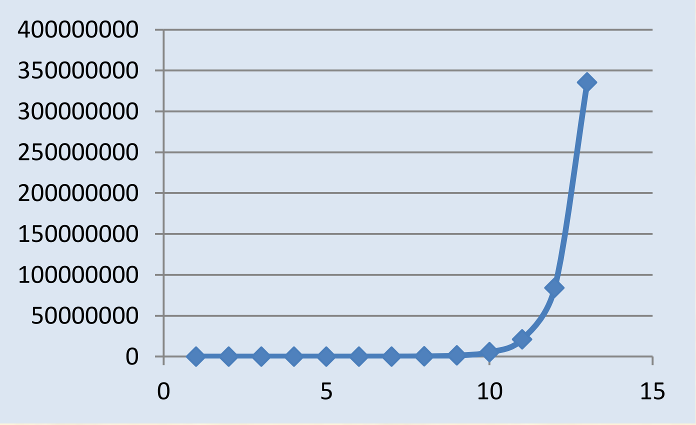


график модели: $y = ab^x$ (b>1)

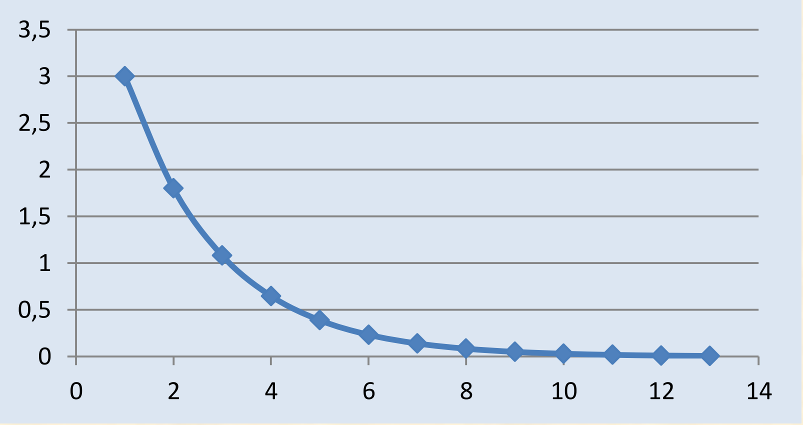
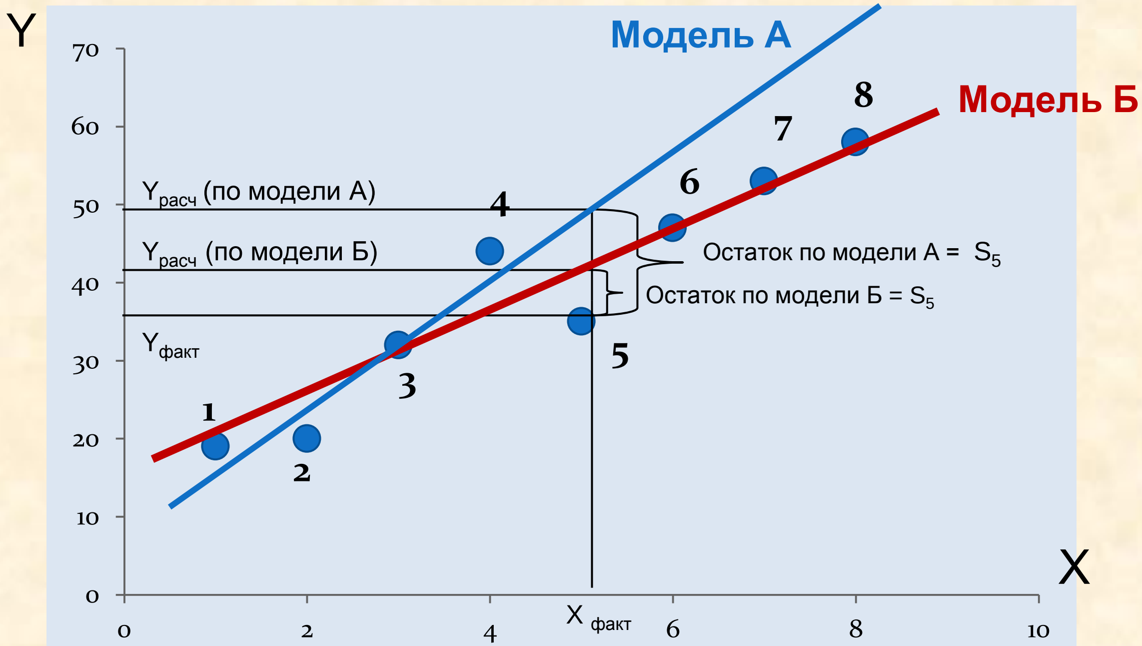


график модели: $y = ab^x$ (b>0)

Построение стандартной парной линейной модели. Метод наименьших квадратов

1 Этап: Определяются переменные величины Y и X.
2 Этап: Формируется статистическая выборка для переменных X и Y (точки данных).
3 Этап: Строится **поле корреляции** (зависимости)



4 Этап: Визуально определяется характер распределения точек. Если точки стремятся к графику линейной модели, то зависимость может быть аппроксимирована парной линейной моделью.
5 Этап: Записывается линейная модель в общем виде: **y = ax + b.** Далее необходимо определить параметры a и b. Сочетаний параметров – бесконечно. **Необходимо определить сочетание, при котором линейная модель была бы максимально приближена к точкам данных, т.е. необходимо найти модель с** минимально возможными остатками.

Условие максимальной близости модели: **S = $\sum S_i^2$ - минимальна !!!!!!!**
Метод наименьших квадратов (базируется на мат. анализе)

Возможности метода наименьших квадратов

Линейная модель

МНК,
МЦТ

Стандартные не линейные модели

МНК,
МЦТ

Не стандартные модели

Модель приводится к линейной

МНК

Модель не приводится к линейной

Метод итераций

Последовательность действий в МНК (если система уравнений не известна)

1) выбор функции для аппроксимации

2) Математическая запись выражения для суммы квадратов остатков как функции от параметров модели

3) Нахождение с помощью мат. анализа критической точки данной функции:
 - нахождение частных производных;
 - приравнивание их к нулю;
 - запись полученных уравнений в систему;
 - решение системы относительно неизвестных параметров (найдена критическая точка для функции суммы квадратов остатков

4) проверка критической точки на минимум

5) если критическая точка – точка минимум, то параметры выбранной модели найдены

Построение стандартной обратной модели. Метод наименьших квадратов

1 Этап: Определяются переменные величины Y и X.
2 Этап: Формируется статистическая выборка для переменных X и Y (точки данных).
3 Этап: Строится **поле корреляции** (зависимости)

4 Этап: Визуально определяется характер распределения точек. Если точки стремятся к графику обратной модели, то зависимость может быть аппроксимирована парной обратной моделью.
5 Этап: Записывается обратная модель в общем виде: **y = 1/(ax + b).** Далее необходимо определить параметры a и b. Сочетаний параметров – бесконечно. **Необходимо определить сочетание, при котором гиперболическая модель была бы максимально приближена к точкам данных, т.е. необходимо найти модель с** минимально возможными остатками.

Условие максимальной близости модели: **S = $\sum S_i^2$ - минимальна !!!!!!!**
Метод наименьших квадратов (базируется на мат. анализе)

Построение стандартной парной обратной модели. Метод наименьших квадратов

S =
$$\sum \boldsymbol{S_i}^2 = \sum(\boldsymbol{y}_{\text{расчт}\,\boldsymbol{i}} - \boldsymbol{y}_{\text{фактич}\,\boldsymbol{i}})^2 = \sum(\boldsymbol{1}/(\boldsymbol{a}\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{i}} + \boldsymbol{b}) - \boldsymbol{y}_{\text{фактич}\,\boldsymbol{i}})^2$$

S = f (a, b) – сумма квадратов остатков есть функция от параметров модели

Цель: Определить параметры A и B при которых S минимальна (задача из мат. анализа на определение минимума функции)

Свойство критической точки:

«Производная в критической точке равна нулю» !!!!!!

Последовательность нахождения параметров A и B (координаты критической точки):

1) определяется S': S'_a; S'_b

2) S' = 0 (свойство критической точки): S'_a (b = const) = 0; S'_b (a = const) = 0

3) Из полученных уравнений формируется система уравнений с двумя неизвестными параметрами a и b (координатами критической точки)

4) Определяется: является ли критическая точка минимумом или максимумом!!!!!

5) Если критическая точка – минимум, то полученные значения и есть параметры обратной модели, которая ближе остальных расположена к точкам данных.

Построение стандартной парной обратной модели. Метод наименьших квадратов

Упростим условие: <u>«Предположим, что у нас всего две точки данных»</u>

$$S = \sum S_i^2 = \sum(y_{\text{расчт } i} - y_{\text{фактич } i})^2 = \sum(1/(ax_i + b) - y_{\text{фактич } i})^2 = (1/(ax_1 + b) - y_1)^2 + (1/(ax_2 + b) - y_2)^2$$

$S'_a(b = const) = ((1/(ax_1 + b) – y_1)^2)' + ((1/(ax_2 + b) – y_2)^2)' = 2(1/(ax_1 + b) – y_1)(1/(ax_1 + b) – y_1)' + 2(1/(ax_2 + b) – y_2)(1/(ax_2 + b) – y_2)' = 2(1/(ax_1 + b) – y_1)/x_1 + 2(1/(ax_2 + b) – y_2)/x_2$

$S'_a(b = const) = 0$

$S'_b(a = const) = ((1/(ax_1 + b) – y_1)^2)' + ((1/(ax_2 + b) – y_2)^2)'$
$S'_b(a = const) = 0$

Но получаем сложную систему нелинейных уравнений, поэтому требуется процедура линеаризации, т.е. приведения обратной модели к линейному виду.

<u>y = 1/(ax + b);</u>

<u>1/y = ax + b</u>
<u>Обозначим 1/y через Y ⇒ Y = ax + b</u>

Для данной модели МНК

$$\begin{cases} \sum 1/y_i = a\sum(x_i) + nb \\ \sum(\frac{x_i}{y_i}) = a\sum(x_i^2) + b\sum(x_i) \end{cases}$$

Построение стандартной парной обратной модели. Метод наименьших квадратов

$$\begin{cases} \sum 1/y_i = a\sum(x_i) + nb \\ \sum(\frac{x_i}{y_i}) = a\sum(x_i{}^2) + b\sum(x_i) \end{cases}$$

Объединение двух условий в систему. Решение системы относительно параметров **a, b** позволяет определить **критическую точку** для функции **S**

Способы решения системы

в ручную

SPSS

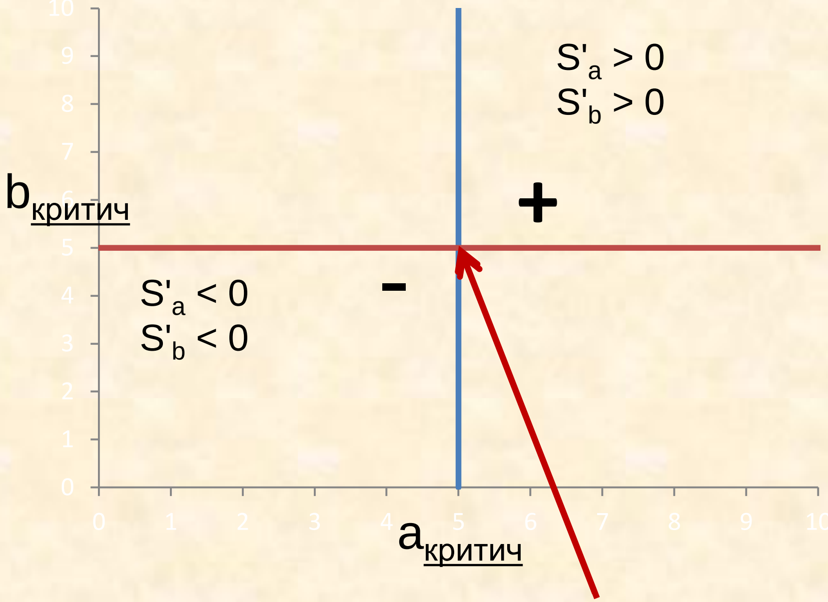
Пакет Анализа (MExcel)

? Критическая точка – это минимум или максимум функции

Далее составляется модель: 1/y = ax + b или y = 1/ (ax + b)

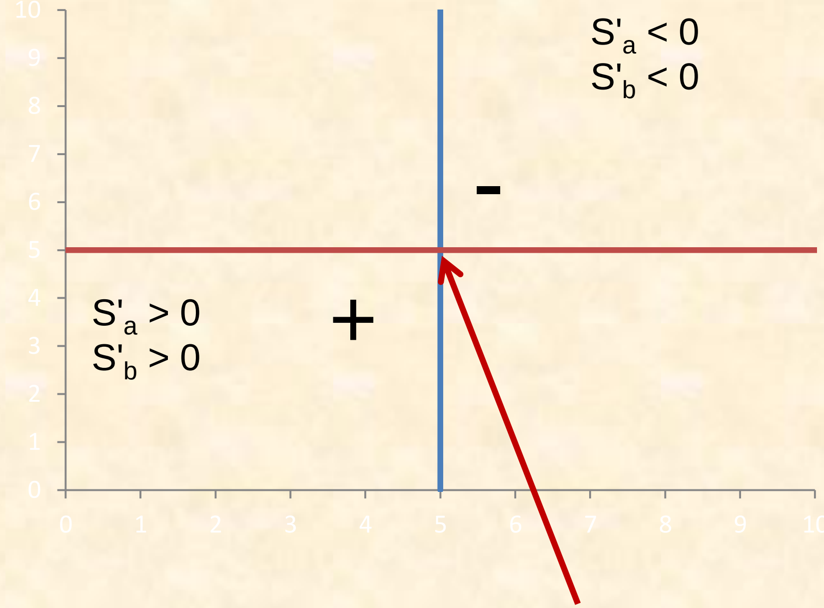
Проверка критической точки на минимум

Критическая точка - минимум



Критическая точка (a, b) - минимум

Критическая точка - максимум



Критическая точка (a, b) - максимум

Построение парной показательной модели

1 Этап: Определяются переменные величины Y и X.
2 Этап: Формируется статистическая выборка для переменных X и Y (точки данных).
3 Этап: Строится **поле корреляции** (зависимости)

4 Этап: Визуально определяется характер распределения точек. Если точки стремятся к графику показательной модели, то зависимость может быть аппроксимирована парной показательной моделью.
5 Этап: Записывается показательная модель в общем виде: **$y = ab^x$.** Далее необходимо определить параметры a и b. Сочетаний параметров – бесконечно. **Необходимо определить сочетание, при котором показательная модель была бы максимально приближена к точкам данных, т.е. необходимо найти модель с** минимально возможными остатками.

Условие максимальной близости модели: **S = $\sum S_i^2$ - минимальна !!!!!!!**
Метод наименьших квадратов (базируется на мат. анализе)

$$S = \sum \boldsymbol{S_i}^2 = \sum(\boldsymbol{y}_{\text{расчт } \boldsymbol{i}} - \boldsymbol{y}_{\text{фактич } \boldsymbol{i}})^2 = \sum(\boldsymbol{a}\boldsymbol{x_i}^{\boldsymbol{b}} - \boldsymbol{y}_{\text{фактич } \boldsymbol{i}})^2$$

Построение парной показательной модели (продолжение)

S = f (a, b) – сумма квадратов остатков есть функция от параметров модели

Цель: Определить параметры a и b при которых S минимальна (задача из мат. анализа на определение минимума функции)

Свойство критической точки:

«Производная в критической точке равна нулю» !!!!!!

Последовательность нахождения параметров a и b (координаты критической точки):
1) определяется S': S'_a; S'_b
2) S' = 0 (свойство критической точки): S'_a (b = const) = 0; S'_b (a = const) = 0
3) Из полученных уравнений формируется система уравнений с двумя неизвестными параметрами a и b (координатами критической точки)

!!!!!! НО в итоге получаем нерешаемую систему, в которой неизвестный параметр b находится в степени !!!!

МНК применяется, но предварительно проводится процедура ЛИНЕАРИЗАЦИИ ПОКАЗАТЕЛЬНОЙ МОДЕЛИ (приведение модели к линейному виду)

Построение парной показательной модели (продолжение)

ЛИНЕАРИЗАЦИЯ ЧЕРЕЗ ЛОГАРИФМИРОВАНИЕ

$$\lg y = \lg(ab^x) = \lg a + \lg b^x = \lg a + x\lg b$$

Введем новые переменные: $Y = \lg y; A = \lg a, B = \lg b$

$Y = Bx + A$ (линейная модель зависимости $\lg y$ от x

Исходные данные y (выборки) нужно прологарифмировать и дальше работать с логарифмами

Пришли к задаче: найти такие B и A, при которых сумма квадратов разностей логарифмов Yрасчетных и логарифмов Yфактических минимальная!!!!

$S = \Sigma(\lg(y\ расч) - \lg(y фактич)^2$ – минимальная

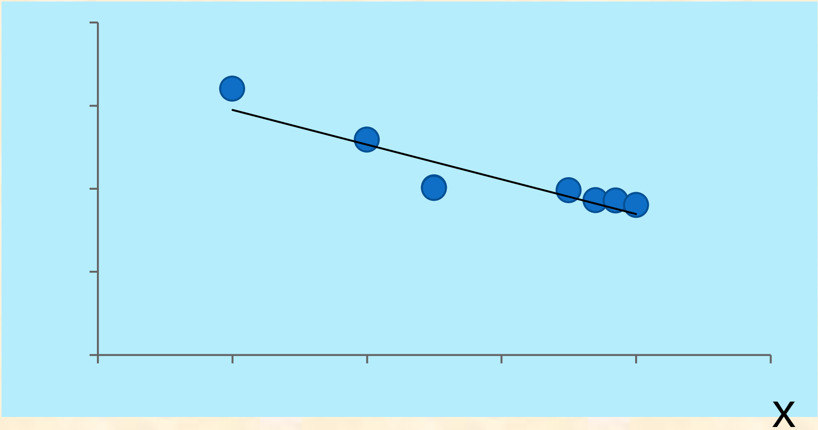
$S = \Sigma(B*x + A - \lg(y_{фактич})^2$

$S'_A = 0; S'_B = 0$

МНК определяются параметры B, A

$$\begin{cases} \sum Lg(yi) = B\sum x_i + nA \\ \sum Lg(y_i) * xi = B\sum (x_i)^2 + A\sum x_i \end{cases}$$

Lg(y)



x

Из системы получим такие параметры B, A, при которых сумма квадратов разностей логарифмов игрика расчётного и фактического минимальная!!!!!!

Построение парной показательной модели (продолжение)

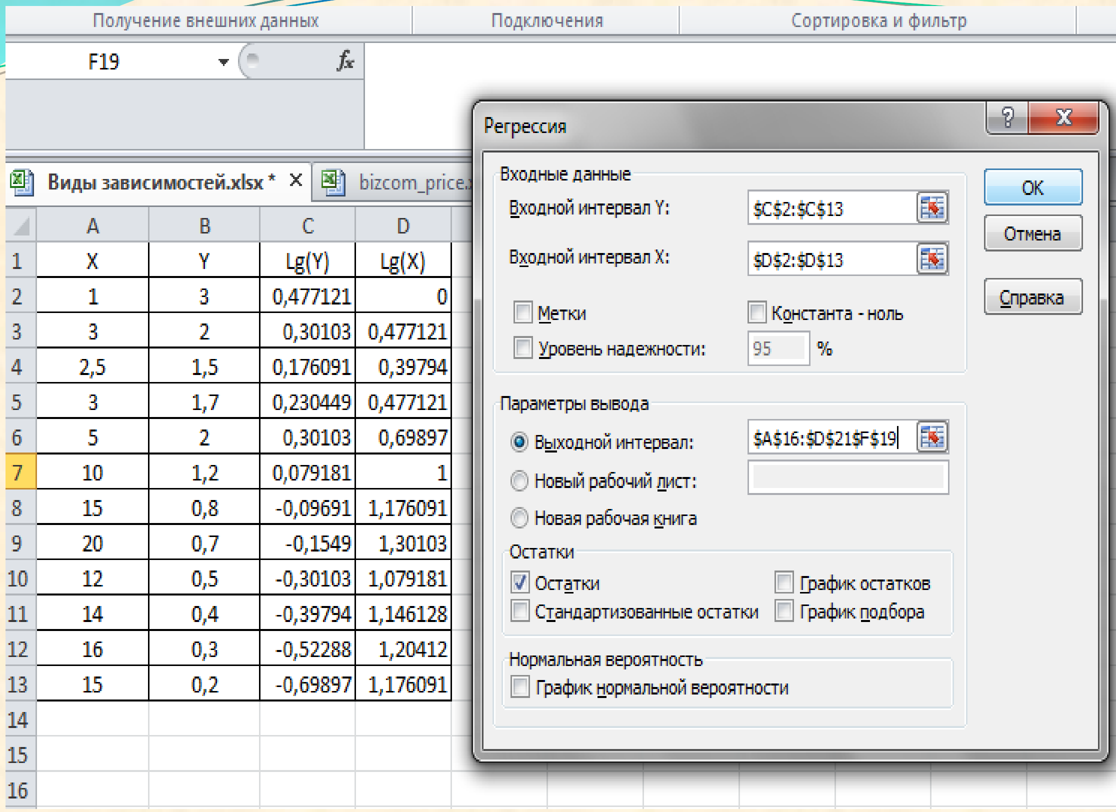
$$\begin{cases} \sum Lg(yi) = B\sum x_i + nA \\ \sum Lg(y_i) * xi = B\sum (x_i)^2 + A\sum x_i \end{cases}$$

Решаем вручную

Решаем в пакете анализа

Решаем в пакете SPSS

Построение парной показательной модели в Пакете Анализа (продолжение)



	A	B	C	D
1	X	Y	Lg(Y)	Lg(X)
2	1	3	0,477121	0
3	3	2	0,30103	0,477121
4	2,5	1,5	0,176091	0,39794
5	3	1,7	0,230449	0,477121
6	5	2	0,30103	0,69897
7	10	1,2	0,079181	1
8	15	0,8	-0,09691	1,176091
9	20	0,7	-0,1549	1,30103
10	12	0,5	-0,30103	1,079181
11	14	0,4	-0,39794	1,146128
12	16	0,3	-0,52288	1,20412
13	15	0,2	-0,69897	1,176091
14				
15				
16				

ИТОГИ РАСЧЕТА

	Коэффициенты	Стандартная ошибка	t-статистика
Y-пересечение	0,5708989	0,14528	3,92938
Переменная X 1	-0,7360042	0,15539	-4,7362

ВЫВОД ОСТАТКА

Наблюдение	Предсказанное Y	Остатки
1	0,5708989	-0,093778
2	0,2197357	0,0812943
3	0,2780134	-0,101922
4	0,2197357	0,0107133
5	0,0564541	0,2445759
6	-0,1651053	0,2442865
7	-0,2947092	0,1977992
8	-0,3866646	0,2317626
9	-0,223383	-0,077647
10	-0,2726561	-0,125284
11	-0,3153384	-0,20754
12	-0,2947092	-0,404261

Подставляются в линейную модель

Параметр b линейной модели

Параметр A линейной модели

Проверка критической точки на минимум (максимум)

Построение парной показательной модели в (продолжение)

1 способ – по линейной модели

2 способ – по показательной модели

ПРОГНОЗ <u>y</u> ПРИ ЗАДАННЫХ ЗНАЧЕНИЯХ <u>x</u>

1 способ – по линейной модели:

1) задать x

2) подставить в линейную модель и рассчитать Lg(y)

3) вычислить y (прогнозное) как $10^{Lg(y)}$

2 способ – по показательной модели:

1) рассчитать $a = 10^A$

2) рассчитать $b = 10^B$

3) подставить a, b в общий вид показательной модели (модель готова)

3) задать x

4) подставить в показательную модель значение x и рассчитать y (прогноз)

Итог (y) одинаковый – это и есть прогноз